Mai multe demonstrații ale unei inegalități clasice

Matematică - Inegalități

www.enciclopul.ro

Inegalitatea lui Nesbitt are următorul enunț (pentru a, b, $c \in \mathbb{R}_+$):

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Urmează mai multe soluții clasice și neclasice ale inegalității, de la cele care folosesc bine-cunoscutele inegalități ale mediilor, la cele care apelează la statornicii prieteni Cauchy, Buniakovski și Schwarz, precum și unele care folosesc inegalități simetrice, cât și cu soluții ”muncitorești” ce implică, bineînțeles, Muirhead):

1 Inegalitatea mediilor AM-GM

Inegalitatea de demonstrat se exprimă ca:

$$[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq 9$$

Conform Inegalității Mediilor (AM-GM):

$$LHS \geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}} = 9$$

De unde rezultă concluzia. De menționat că avem caz de egalitate la:

$$a+b = b+c = c+a \Longleftrightarrow a = b = c$$

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{b+c} = \frac{1}{c+a} \Longleftrightarrow a = b = c$$

2 Inegalitatea Mediilor AM-GM cu substituții

Vom demonstra aceeași inegalitate echivalentă ca și în prima soluție:

$$[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq 9$$

Facem substituția $a+b=x$, $b+c=y$ și $c+a=z$. Obținem:

$$3+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}\geq 9$$

Dar inegalitatea $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ este cunoscută, de unde obținem concluzia. Avem caz de egalitate la:

$$a+b=b+c\iff a=c$$

$$b+c=c+a\iff\iff a=b$$

$$c+a=a+b\iff b=c$$

3 Inegalitatea Mediilor AM-HM cu substituții

Folosind aceeași substituție ca în soluția precedentă, rămâne de demonstrat:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$$

Echivalent cu:

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$

Care este evident inegalitatea AM-HM în trei variabile. Caz de egalitate la:

$$x=y=z\iff a=b=c$$

4 Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz

Scriem inegalitatea de demonstrat ca în soluțiile anterioare:

$$(a+b+b+c+c+a)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq 9$$

Conform Inegalității Cauchy-Buniakovski-Schwarz:

$$LHS\geq\left(\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{1}\right)^2=9$$

Ceea ce trebuia demonstrat. Avem egalitate la:

$$(a+b)^2=(b+c)^2=(c+a)^2\iff a=b=c$$

5 Inegalitatea Bergström - Titu Andreescu

Vom demonstra o inegalitate echivalentă, rezultată prin amplificare:

$$\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{ab+bc}+\frac{c^2}{ac+bc}\geq\frac{3}{2}$$

Din forma Titu a Inegalității Cauchy-Buniakovski-Schwarz găsim:

$$LHS\geq\frac{(a+b+c)^2}{2\left(ab+bc+ca\right)}$$

Dar, din Inegalitatea Rearanjamentelor/Inegalitatea Mediilor AM-GM/formare de pătrate:

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$$

De unde obținem că:

$$(a+b+c)^2\geq 3\left(ab+ac+bc\right)$$

Adică avem:

$$\frac{(a+b+c)^2}{2\left(ab+bc+ca\right)}\geq\frac{3}{2}$$

Ceea ce trebuia demonstrat. Egalitate avem la:

$$\frac{a}{ab+ac}=\frac{b}{ab+bc}=\frac{c}{ac+bc}\Longleftrightarrow a=b=c$$

6 Inegalitatea Rearanjamentelor

Să observăm că tripletele $(a,\,b,\,c)$ și $\left(\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}\right)$ sunt la fel ordonate. Aplicând de două ori Inegalitatea Rearanjamentelor:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}$$
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}$$

Adunând cele două relații găsim că:

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\geq 3$$

Echivalent cu inegalitatea de demonstrat. Egalitate la:

$$a=b,\,b=c,\,c=a\Longleftrightarrow a=b=c$$

7 Inegalitatea lui Cebîșev

Folosind aceeași ordonare:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq 3\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)$$

Și:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq 3\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)$$

Adunând relațiile:

$$(a+b+b+c+c+a)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq 9$$

Echivalent cu inegalitatea de demonstrat. Cazul de egalitate se atinge la $a=b=c$.

8 Inegalitatea lui Muirhead

Relația de demonstrat se scrie, aducând la același numitor:

$$2\left[a\left(a+b\right)\left(a+c\right)+b\left(a+b\right)\left(b+c\right)+c\left(a+c\right)\left(b+c\right)\right]\geq 3\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)$$

Efectuând calculele:

$$2\sum a^3+2\sum a^2b+6abc\geq 3\sum a^2b+6abc$$

Rămâne de demonstrat:

$$T\left[3{,}0{,}0\right]+2T\left[2{,}1{,}0\right]+T\left[1{,}1{,}1\right]\geq 3T\left[2{,}1{,}0\right]+T\left[1{,}1{,}1\right]$$

Reducând:

$$T\left[3{,}0{,}0\right]\geq T\left[2{,}1{,}0\right]$$

Cum avem:

$$3\geq 2$$

$$3+0\geq 2+1$$

$$3+0+0=2+1+0$$

Înseamnă că

$$\left[3{,}0{,}0\right]\succcurlyeq\left[2{,}1{,}0\right]$$

De unde inegalitatea este adevărată. Rămâne cazul de egalitate în inegalitate (calculat separat): $a=b=c$.

9 Lemă în două variabile

Lemă: $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$ *(iese imediat din Inegalitatea Rearanjamentelor)*

După desfaceri, inegalitatea se reduce la (vezi soluția anterioară):

$$2\sum a^3 \geq \sum a^2 b$$

Aplicând de trei ori lema, rezultă concluzia. Caz de egalitate la $a = b = c$.

10 Calcul de expresii

Definim:

$$A\left(a,\ b,\ c\right) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

$$B\left(a,b,c\right) = \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$$

$$C\left(a,\ b,\ c\right) = \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}$$

Evident $B\left(a,\ b,\ c\right) + C\left(a,b,c\right) = 3$.

Din Inegalitatea Mediilor AM-GM avem:

$$A\left(a,b,c\right) + B\left(a,b,c\right) \geq 3$$

$$A\left(a,b,c\right) + C\left(a,b,c\right) \geq 3$$

Însumând:

$$2A\left(a,\ b,c\right) + B\left(a,b,c\right) + C\left(a,\ b,c\right) \geq 6$$

Prin urmare:

$$A\left(a,\ b,c\right) \geq \frac{3}{2}$$

Ceea ce trebuia demonstrat. Egalitatea evident la $a = b = c$.